서강대학교 SOGANG UNIVERSITY

논 술 시 험 문제지

<컴퓨터공학계/화공생명공학계/기계공학계>

■ 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고 본문부터 시작할 것.
2. 답안 분량은 띄어쓰기 포함한 글자 수임.
3. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용하여야 함.
4. 답안이나 답안지의 여백에 자신을 드러낼 수 있는 답안 이외의 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현 또는 표시를 한 경우에는 0점 처리함.

<문제 1 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 공집합이 아닌 집합 D에서 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$로 가는 함수 $f: D \to \mathbb{R}$을 생각해보자. 만약 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) \le f(x_{\max})$인 $x_{\max} \in D$가 존재하면 함수 f는 $x_{\max}$에서 최댓값 $f(x_{\max})$를 갖는다고 말하고, 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) \ge f(x_{\min})$인 $x_{\min} \in D$가 존재하면 함수 f는 $x_{\min}$에서 최솟값 $f(x_{\min})$을 갖는다고 말한다. 다시 말하면, f의 최댓값(또는 최솟값)은 f가 가질 수 있는 가장 큰 (또는 작은) 값이다. 정의에 의해서 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) \le M$가 성립하더라도 $f(x_{\max}) = M$인 $x_{\max} \in D$가 존재하지 않으면 실수 M은 f의 최댓값이 될 수 없다. 예를 들어, 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f(x) = 1 - x^2$을 생각하면 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) \le 2$이지만 $f(x_{\max}) = 2$인 $x_{\max} \in \mathbb{R}$가 존재하지 않으므로 2는 f의 최댓값이 될 수 없다. 사실 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) \le 1$이고 $f(0) = 1$이므로 f는 0에서 최댓값 1을 갖는다.

[나] 함수 $f: D \to \mathbb{R}$의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제는 가장 고전적이면서도 중요한 수학문제 중의 하나이다. D가 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 또는 그 곱집합인 $\mathbb{R}^n$의 부분집합이면 f의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 간단하면서도 매우 유용한 방법은 절대부등식을 이용하는 것이다. 임의의 실수 $a_1, \ldots, a_n$에 대하여 성립하는 부등식

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \ge 0$$

은 가장 간단한 절대부등식이며 등호는 $a_1 = \cdots = a_n = 0$일 때만 성립한다. 특히 유용한 절대부등식은 음이 아닌 임의의 실수 $a_1, \ldots, a_n$에 대한 산술·기하평균 부등식

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

이며 등호는 $a_1 = \cdots = a_n$일 때만 성립한다.

[다] 임의의 실수 $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$에 대하여 코시-슈바르츠(Cauchy-Schwarz) 부등식

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

이 성립하며 등식은 모든 $k = 1, \ldots, n$에 대하여 $\alpha a_k = \beta b_k$인 상수 α, β(동시에 0은 아님)가 존재할 때만 가능하다. 코시-슈바르츠 부등식을 최댓값·최솟값 문제에 응용할 수 있다. 예를 들어, $2x^2 + y^2 = 1$을 만족하는 임의의 실수 x, y에 대하여

$$(x+2y)^2 = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}\,x) + 2y\right\}^2 \le \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2^2\right\}\{(\sqrt{2}\,x)^2 + y^2\} = \frac{9}{2}$$

이고 등호는

$$\frac{\sqrt{2}\,x}{1/\sqrt{2}} = \frac{y}{2}, \text{ 즉 } 4x = y$$

일 때 성립한다. 또한 $2x^2 + y^2 = 1$이고 $4x = y$인 실수 x와 y의 쌍이 아래와 같이 두 개 존재한다.

$$(x, y) = \left(\pm\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \pm\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

따라서 $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x^2 + y^2 = 1\}$에서 정의된 함수 $f(x,y) = x + 2y$의 최솟값은 $-3/\sqrt{2}$이고 최댓값은 $3/\sqrt{2}$이다.

【1-1】 닫힌 구간 $[a,b]$에서 정의된 연속함수가 항상 최댓값과 최솟값을 갖는다는 것은 미적분학의 가장 기본적인 사실 중에 하나이다. 그러나 열린 구간 (a,b)에서 정의된 연속함수에 대해서는 그렇지 않을 수도 있음을 제시문 [가]에 근거하여 설명하여라.

【1-2】 m과 n을 임의의 자연수라고 하자. 산술·기하평균 부등식을 응용하여 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^m + y^n = m+n,\ x>0,\ y>0\}$에서 정의된 함수 $f(x,y) = xy$의 최댓값을 구하여라.

【1-3】 $b_1^2 + \cdots + b_n^2 > 0$일 때, 코시-슈바르츠 부등식

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

이 성립함을 증명하고 등호는 모든 $k = 1, \ldots, n$에 대하여 $a_k = \beta b_k$인 상수 β가 존재할 때만 가능하다는 것을 보여라.

【1-4】 $a^2 + 8b^2 = 2$인 두 양수 a, b에 대하여 함수

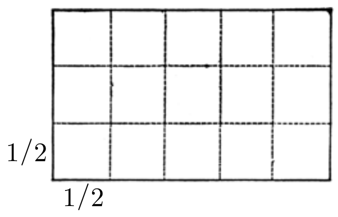
$$f(x,y) = \left(x + \frac{a}{y}\right)\left(y + \frac{b}{x}\right) \quad (x, y > 0)$$

의 최솟값을 $m(a,b)$라고 할 때, $m(a,b)$의 최댓값을 구하여라.

<문제 2 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 토지의 크기 측정을 위해 기하(geometry)라는 단어가 그리스어에서 생겨났듯이 고대 그리스인들은 무리수 개념－예를 들어, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 등을 알고 있었다. 물론 이런 무리수들을 숫자로 인식하지는 않았지만, 오늘날과 같은 개념인 넓이가 2가 되는 정사각형의 한 변의 길이를 $\sqrt{2}$로 알고 있었다.

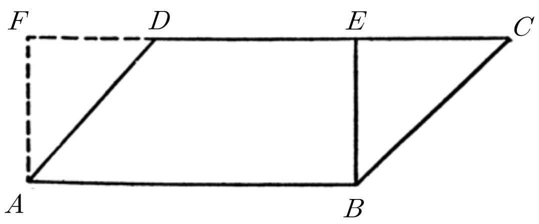
[나] 고대 그리스인들은 공간에서 부피의 단위(단위 부피)를 모든 모서리의 길이가 1인 정육면체로 정의하고, 각 모서리의 길이가 자연수인 직육면체의 부피를 단위 부피로의 **분할**을 통해 **너비×높이×깊이**로 이해하였다. 이는 평면에서 자연수 길이를 갖는 직사각형의 넓이의 개념을 자연스럽게 확장한 것이다. 그렇다면 유리수 길이를 가지는 직육면체의 부피는 어떻게 계산될까? 먼저 평면에서 두 변의 길이가 각각 3/2, 5/2인 직사각형을 생각하자. 차례로 변의 길이가 1/2인 정사각형을【그림 1】처럼 **이어붙임**을 하여 15개 만든다. 변의 길이가 1/2인 정사각형은 길이 1인 정사각형의 1/4을 차지하므로 그 넓이는 1/4이다. 이러한 개념을 이용하면 유리수 길이를 갖는 직사각형의 넓이는 **너비×높이**임을 알 수 있다.



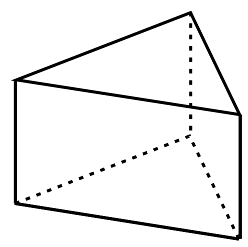
【그림 1】

이 방법을 공간의 경우로 확장할 수 있으며, 모서리의 길이가 유리수인 직육면체의 경우도 **분할** 또는 **이어붙임**을 통해 동일한 부피 공식인 **너비×높이×깊이**를 얻는다. 일반적으로 직육면체의 모서리의 길이가 무리수라고 하더라도 유리수의 극한을 이용하여 동일한 부피 공식을 얻는다.

[다]【그림 2】에서 평행사변형 $ABCD$에서 삼각형 BCE를 잘라서 ADF에 붙인다. 이러한 **분할**과 **이어붙임**을 통해 평행사변형 $ABCD$와 직사각형 $ABEF$의 넓이가 같음을 알 수 있다. 따라서 주어진 평행사변형의 넓이는 **너비×높이**가 된다. 이를 이용하면 삼각형의 면적은 1/2×**너비×높이**가 되고 공간에서 직각삼각기둥의 부피는 **삼각형의 넓이×높이**로 계산할 수 있다. (【그림 3】 참고) 이 공식은 직각이 아닌 삼각기둥의 부피에도 동일하게 성립한다.

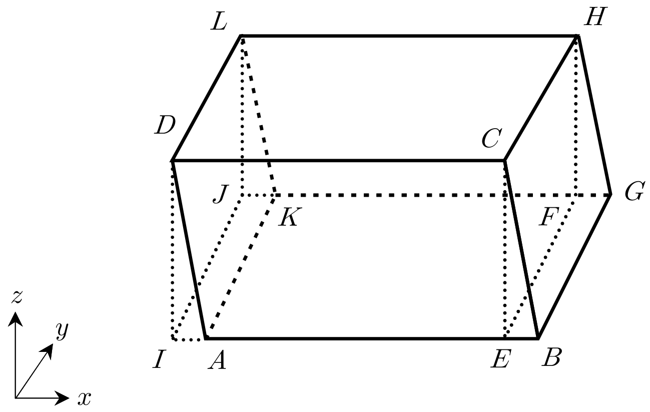


【그림 2】

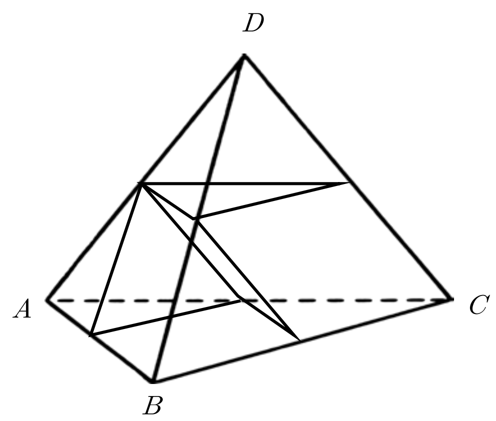


【그림 3】

공간에서【그림 4】와 같이 x축으로 기울어진 평행육면체 $ABGK$-$DCHL$을 생각하자. 다면체 $EBGF$-HC를 잘라 $IAKJ$-LD에 이어붙임을 하여 직육면체 $IEFJ$-$DCHL$을 얻는다. 이러한 방법으로 일반적인 평행육면체인 경우도 직육면체로 변형하여 **밑면(평행사변형)의 넓이×높이**로 부피를 계산할 수 있다.



【그림 4】



【그림 5】

[라] 고대 그리스인들은 유한 번의 **분할** 또는 **이어붙임**을 하여 사면체를 직육면체로 변형하고자 하였다. 이는 불가능하다는 것이 20세기 초가 되어서야 밝혀졌다. 그렇다면 사면체의 부피를 어떻게 구할 수 있을까? 사면체 $ABCD$의 여섯 개의 모서리를 각각 이등분하여【그림 5】와 같이 연결하면, 작은 사면체 두 개와 삼각기둥 두 개로 분할된다. 이와 같은 분할을 반복하여 만들어진 삼각기둥의 부피를 모두 합하면

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)\times \text{밑면(삼각형 } ABC\text{)의 넓이}\times\text{높이} = \frac{1}{3}\times \text{밑면(삼각형 } ABC\text{)의 넓이}\times\text{높이} \qquad \cdots\cdots (1)$$

이다. 사면체에서 삼각기둥을 계속해서 제거하면 남은 부분의 부피는 0으로 수렴하므로 결국 사면체의 부피는

$$\frac{1}{3}\times \text{밑면(삼각형 } ABC\text{)의 넓이}\times\text{높이}$$

이다.

【2-1】 제시문 [나]를 참고하여 변의 길이가 임의의 양의 유리수인 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 설명하고 직육면체의 경우로 확장하여라.

【2-2】 제시문 [라]의 정사면체 분할에서 얻어지는 두 사면체의 부피가 같고 두 삼각기둥 역시 부피가 같음을 보여라.

【2-3】 제시문 [라]에서 (1)이 성립함을 자세히 설명하여라.

【2-4】 정팔면체의 한 삼각형을 밑면이라고 하고 마주보이는 반대편 삼각형까지의 거리를 높이라고 할 때, 제시문을 이용하여 부피 공식을 유도하라.

서강대학교 SOGANG UNIVERSITY

2014학년도 수시모집 논술전형 예시답안

<컴퓨터공학계/화공생명공학계/기계공학계>

[문제 1]

가. 출제 및 채점기준

고교 교과과정의 기본적인 수함개념 중의 하나인 함수의 최댓값과 최솟값에 대한 정확한 이해를 묻는 문제임. 미적분학을 이용하지 않고 간단한 절대부등식인 산술·기하평균 부등식과 코시-슈바르츠의 부등식을 응용하여 최대최소 문제를 해결하는 능력을 평가하고자 함.

나. 예시답안

【1-1】 열린 구간 $(0,1)$에서 정의된 함수 $f(x)=x$를 생각한다. 함수 f가 $(0,1)$의 어떤 점 $x_{\max}$에서 최댓값 $f(x_{\max})$를 가진다고 하자. 그러면 우선 $x_{\max}\in(0,1)$이므로 $x_{\max}<x<1$인 $x\in(0,1)$이 존재한다 (예를 들어, $x=(x_{\max}+1)/2$로 놓으면 된다). 가정에 의하여 $f(x_{\max})$가 함수 f의 최댓값이므로 $x=f(x)\le f(x_{\max})=x_{\max}$가 성립해야한다. 그러나 이것은 x가 $x_{\max}<x$가 되도록 선택한 것에 모순이다. 그러므로 f는 최댓값을 갖지 않는다. 마찬가지로 f는 최솟값도 갖지 않는다.

【1-2】 임의의 $(x,y)\in D$에 대하여

$$\begin{aligned}1=\frac{x^m+y^n}{m+n}&=\frac{1}{n+m}\left(\frac{1}{n}x^m+\cdots+\frac{1}{n}x^m+\frac{1}{m}y^n+\cdots+\frac{1}{m}y^n\right)\\&\ge\sqrt[m+n]{\left(\frac{1}{n}x^m\right)^n\left(\frac{1}{m}y^n\right)^m}=\sqrt[m+n]{\frac{1}{n^nm^m}(xy)^{mn}}\end{aligned}$$

이므로

$$(xy)^{mn}\le n^nm^m$$

이고 따라서

$$f(x,y)=xy\le\left(n^nm^m\right)^{1/mn}=n^{1/m}m^{1/n}$$

이다. 이 부등식에서 등호는

$$\frac{1}{n}x^m=\frac{1}{m}y^n$$

일 때만 성립하고, 이 때 $x^m+y^n=m+n,\ x>0,\ y>0$을 이용하면

$$x^m=n,\ \ y^n=m\ \ \Leftrightarrow\ \ x=n^{1/m},\ \ y=m^{1/n}$$

이고

$$f(x,y)=n^{1/m}m^{1/n}$$

이다. 그러므로 f는 최댓값 $n^{1/m}m^{1/n}$을 갖는다.

【1-3】 실수 t에 대한 이차함수

$$\phi(t) = (a_1 - tb_1)^2 + \cdots + (a_n - tb_n)^2$$

을 생각하자. $A = a_1^2 + \cdots + a_n^2,\ B = b_1^2 + \cdots + b_n^2,\ C = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ 으로 놓으면

$$\phi(t) = Bt^2 - 2Ct + A = B\left(t - \frac{C}{B}\right)^2 + \frac{AB - C^2}{B}$$

으로 쓸 수 있다. 모든 실수 t에 대하여 $\phi(t) \geq 0$이 성립하므로 특히 $t = \beta = C/B$일 때도 성립한다. 따라서

$$\phi(\beta) = \frac{AB - C^2}{B} \geq 0$$

이므로 $AB \geq C^2$이 성립한다. 또한 $AB = C^2$이면

$$\phi(\beta) = (a_1 - \beta b_1)^2 + \cdots + (a_n - \beta b_n)^2 = 0$$

이므로 모든 $k = 1, ..., n$에 대하여 $a_k = \beta b_k$가 성립한다.

(다른 풀이)

$$C^2 - AB = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_i^2 b_j^2 - 2a_i b_i a_j b_j + a_j^2 b_i^2\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$$

이므로 코시-슈바르츠 부등식이 성립한다. 등호가 성립하는 경우는 $1 \leq i \neq j \leq n$임 모든 i, j에 대하여 $a_i b_j = a_j b_i$일 때이다. 이 때, $B \neq 0$이므로 적당한 k에 대하여 $b_k \neq 0$이다. $\beta = a_k / b_k$로 놓자. 그러면 $1 \leq i \neq j \leq n$임 모든 i, j에 대하여 $a_i b_j = a_j b_i$라는 조건으로부터, $1 \leq i \leq n$인 모든 i에 대하여 $a_i = \beta b_i$임을 보일 수 있다.

【1-4】 산술·기하평균 부등식에 의하여

$$f(x,y) = xy + \frac{ab}{xy} + a + b \geq 2\sqrt{ab} + a + b$$

이고 등식이 $(xy)^2 = ab$일 때 성립하므로

$$m(a,b) = 2\sqrt{ab} + a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

이다. 임의의 양수 r, s에 대하여 코시-슈바르츠 부등식을 두 번 이용하면

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 \leq \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2 (a + rb)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{s}\right)(a^2 + r^2 s b^2)$$

이고 등식은

$$\frac{\sqrt{a}}{1} = \frac{\sqrt{r}\sqrt{b}}{1/\sqrt{r}}, \qquad \frac{a}{1} = \frac{r\sqrt{s}\,b}{1/\sqrt{s}}$$

일 때만 성립한다. 따라서 $r = s = 2$로 잡으면,

$$m(a,b) \leq \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\sqrt{a^2 + 8b^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

이고 등식은 $a = 4b$일 때 성립한다. 그러므로 $m(a,b)$의 최댓값은 $3\sqrt{3}/2$이다.

[문제 2]

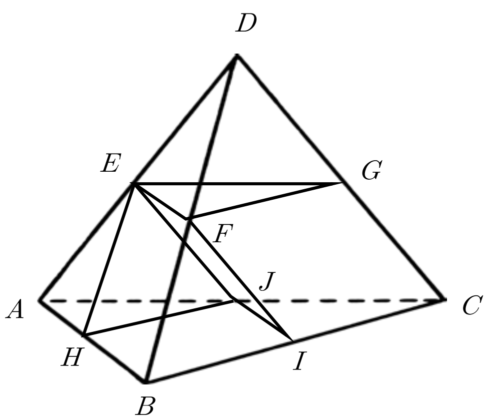
가. 출제 및 채점기준

고등학교 교과서의 기하와 벡터 내용을 다루고 있으며 특히 공간도형의 기하적인 문제와 부피 계산을 무한등비급수로서 해결 가능한 예를 바탕으로 출제하여, 학생들이 기본 개념에 대한 이해 및 응용력을 평가하고자 했다.

나. 예시답안

【2-1】 직사격형의 경우, 변의 길이가 m/n, p/q라고 하자. n과 q의 최소공배수를 L이라고 하면, 적당한 정수 m', p'에 대하여 $m/n = m'/L$이고 $p/q = p'/L$으로 쓸 수 있다. 한 변의 길이가 $1/L$인 정사각형을 제시문 [나]에서와 같이 $m'p'$개 이어붙인다. 그런데 변의 길이가 $1/L$인 정사각형의 넓이는 길이가 1인 정사각형의 넓이의 $1/L^2$이다. 따라서 구하는 넓이는 $m'p'/L^2 = mp/nq$이므로 변의 길이가 유리수인 직사각형의 넓이는 너비×높이이다. 세 유리수의 최소공배를 이용하여 평면의 방법을 직육면체의 경우로 확장할 수 있다.

<u>문제 【2-2】와 【2-3】에 해당함.</u> 각 모서리를 이등분한 점을 그림과 같이 E, F, G, H, I, J라 하자.



【2-2】 모서리의 길이를 이등분하므로 삼각형 EFG, EFD, EGD, FGD, AHJ, AJE, AHE, HJE는 서로 합동이므로 사면체 $EFGD$와 사면체 $AHJE$의 부피는 같다.

삼각기둥 $JIC-EFG$과 삼각기둥 $BIF-HJE$를 비교한다. 삼각기둥 $JIC-EFG$의 밑면(삼각형 JIC)은 삼각기둥 $BIF-HJE$의 밑면(삼각형 BIF)과 합동이고 각각의 높이도 정사면체의 모서리의 길이의 반으로서 같다. 따라서 두 삼각기둥의 부피는 같다.

【2-3】 삼각형 EFG와 삼각형 AHJ는 합동으로서 면적이 같다. 삼각형 EFG로부터 D까지 높이와 삼각형 AHJ로부터 E까지 높이가 사면체의 높이의 $1/2$로서 같다. 따라서 사면체 $EFGD$와 사면체 $AHJE$의 부피는 같다.

삼각기둥 JIC-EFG과 삼각기둥 $BIF-HJE$를 비교한다. 삼각기둥 JIC-EFG의 밑면(삼각형 JIC)의 넓이는 평행사변형 $HBIJ$의 $1/2$이다. 그런데 삼각형 JIC로부터 삼각형 EFG까지 높이와 평행사변형 $HBIJ$로부터 이와 평행한 직선 EF까지 높이는 같다. 평행사변형 $HBIJ$의 넓이×직선 EF까지 높이는 삼각기둥 $BIF-HJE$의 부피의 $1/2$이므로 결국 두 삼각기둥의 부피는 같다.

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하고, 사면체 $ABCD$의 높이를 h라고 하자. 문제 한 삼각기둥의 부피는

$$[S\times\frac{1}{4}]\times[h\times\frac{1}{2}] = S\times h\times 1/8$$

따라서 두 삼각기둥의 부피는 $S\times h\times 1/4$이다.

두 사면체 $EFGD$와 사면체 $AHJE$에 대해 위 분할을 통해 얻어진 삼각기둥의 부피는 같으며 삼각형 EFG 넓이×높이(사면체 $EFGD$의 높이)×$1/8$이다. 그런데 이와 같은 삼각기둥은 모두 4개이므로 두 사면체 $EFGD$와 사면체 $AHJE$로부터 얻어지는 삼각기둥의 부피는

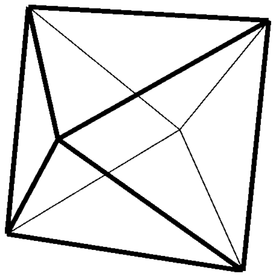
$$\begin{aligned}&\text{삼각형 } EFG \text{ 넓이}\times\text{높이(사면체 } EFGD\text{의 높이)}\times\frac{1}{2}\\&= [S\times\frac{1}{4}]\times[h\times\frac{1}{2}]\times\frac{1}{2}\\&= S\times h\times\frac{1}{4^2}\times 1/4^2\end{aligned}$$

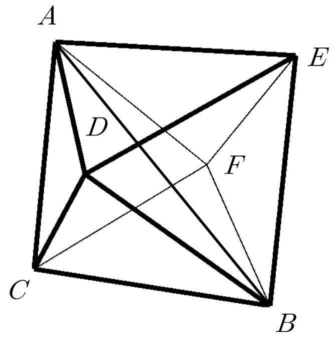
이와 같은 과정을 반복하여 얻어진 모든 삼가기둥의 부피의 합은

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)\times\text{밑면(삼각형)의 넓이}\times\text{높이}$$

이다.

【2-4】 정팔면체는 다음과 같다.





정팔면체의 한 삼각형으로부터 마주보이는 반대편 삼각형은 평행하다. 위 오른쪽 그림과 같이 정팔면체에 두 점 A와 B를 연결하면, 분할에 의해 사면체 $CDB-A$, $CFB-A$, $BED-A$, $BEF-A$의 모두 4개의 사면체를 얻는다. 정팔면체라는 조건으로부터 모든 사면체의 부피는 같으며

$$삼각형의\ 넓이 \times 높이 \times \frac{1}{3} \times 4 = 삼각형의\ 넓이 \times 높이 \times \frac{4}{3}$$

이다.